OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 19.02.2015

Subiecte clasa a IX-a matematică-informatică

1. a) Fie numerele $a,b\in\mathbb{R}$, unde $a+b=1$. Să se arate că $|a-1|+|b-2|\geq 2$.
   b) Dacă $x_1,x_2,...,x_{2n}\in\mathbb{R}$ și $x_1+x_2+...+x_{2n}=2n(n+1)$, să se demonstreze că $|x_1-1|+|x_2-2|+...+|x_{2n}-2n|\geq n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termeni strict pozitivi, definit prin $a_1=1$ și $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}=\frac{n+1}{2}\sqrt{a_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că $\sqrt{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}\sqrt{a_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ și să se determine expresia termenului general a_n.

3. Să se rezolve ecuația $\{x\}^2+\{x\}+1=(1+\{x\})\cdot[1-\{x\}]$, unde $x\in\mathbb{R}$, $\{x\}$ este partea fracționară a lui x, iar $[1-\{x\}]$ reprezintă partea întreagă a numărului $1-\{x\}$.
   (prof. George Georgescu)

4. Se dă triunghiul ABC cu $AB<AC$, $(AA'$ bisectoarea unghiului A, $A'\in(BC)$ și M mijlocul segmentului $[AA']$. Perpendiculara în M pe AA' intersectează dreapta AB în D și dreapta AC în E.
   a) Să se arate că vectorul $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}$ nu poate fi coliniar cu vectorul $\overrightarrow{AA'}$.
   b) Dacă $DE\cap BC=\{F\}$, să se arate că $\frac{DB}{EC}=\frac{FB}{FC}$.
   c) Să se arate că $\frac{DB}{EC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

NOTĂ:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.